TD3

LIMITES, ÉQUIVALENTS, RÉVISIONS D'ALGÈBRE ECG1.

Exercice 1

Donner un équivalent puis calculer la limite des suites de termes généraux suivants :

1. $\frac{1-3n^7+5n-n^3}{n^2+1}$.
2. $\frac{(-1)^n n^2+3n}{n^2+\sqrt{n}}$.
3. $\frac{e^{-\sqrt{n}}+2}{e^{\ln n+3}-5}$.
4. $\frac{n^2e^n-ne^{2n}}{n^3\ln(n)-n(\ln(n))^3}$.
5. $\frac{(ln(n))^2+3n+1}{\ln(n)+5}$.
6. $\frac{n^3-5n\sqrt{n+n-\ln(n)+n^{-1}}}{e^{3n}-e^n+1-e^{-n}}$.
7. $\sqrt{n^2+2}-n$.
8. $\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+n}$
9. $\frac{3^n-2^n}{3^n+2^n}$.
10. 3^ne^{-3n}.
11. $\frac{n^n}{n!}$.

Exercice 2

Donner un équivalent puis calculer la limite des suites de termes généraux suivants :

1. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.
2. $n\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{n^2+1}\right)}$.
3. $(2n-3)\ln\left(\frac{n+3}{n+2}\right)$.
4. $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$.
5. $\left(2^{\frac{1}{n}}+5^{\frac{1}{n}}\right)^n$.
6. $(1+n^2)^{\frac{1}{n}}$.
7. $(e^n+\sqrt{2})^{\frac{1}{n^2}}$.
8. $\frac{\left(1+e^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}}{n\ln(n)-\sqrt{n}}$.

Exercice 3

Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} k! \underset{+\infty}{\sim} n!$$

Exercice 4

Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général

$$u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor .$$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

ECG 2 Maths Appliquées, http://louismerlin.fr.

Exercice 5

Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{nn!}$$

sont adjacentes.

Exercice 6 ECRICOME *2008.*

À tout couple (a, b) de deux réels, on associe la matrice $M(a, b)$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a+2b & -b & -2b \\ 2b & a-b & -4b \\ -b & b & a+3b \end{pmatrix}$$

On désigne par E l'ensemble des matrices $M(a, b)$ où a et b décrivent $\mathbb{R}$. Ainsi $E = \{M(a, b)\,;(a, b) \in \mathbb{R}^2\}$. On note I la matrice identité et A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Enfin, on note U, V et W les vecteurs de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ suivants :

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \;;\; V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;;\; W = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que E est un espace vectoriel.

2. Donner une famille génératrice de E. Cette famille est-elle libre ?

3. On note $E_1(A) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\}$ et $E_2(A) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 2X\}$.

   a. Montrer que $E_1(A) = \mathrm{Vect}(V, W)$. La famille (V, W) est-elle libre ?

   b. Montrer que $E_2(A) = \mathrm{Vect}(U)$. La famille (U) est-elle libre ?

   c. Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (U, V, W)$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

   On note $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   On admet qu'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que les matrices A, P et D vérifient la relation

$$D = P^{-1}AP.$$

4. Prouver que la matrice $P^{-1}M(a, b)P$ est une matrice diagonale que l'on notera $D(a, b)$ et que l'on exprimera en fonction des matrices I et D.

5. **a.** Montrer que $M(a, b)$ est inversible si et seulement si $D(a, b)$ est inversible.

   b. En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b pour que $M(a, b)$ soit inversible.

6. **a.** Prouver que $(M(a, b))^2 = I$ si et seulement si $(D(a, b))^2 = I$.

   b. En déduire l'existence de quatre matrices $M(a, b)$ que l'on déterminera vérifiant

$$(M(a,b))^2 = I.$$

7. Déterminer une matrice B telle que $B^2 = A$.

   Indication : On exprimera B à l'aide de la matrice P et d'une matrice diagonale à déterminer que l'on explicitera.

Exercice 7 **EML** *2004.*
On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre trois à coefficients réels, I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, 0 la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On considère, pour toute matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ les ensembles

$$E_1(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = M\} \quad \text{et} \quad E_2(A) = \left\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid A^2M = AM\right\}.$$

Partie 1.

1. Montrer que $E_1(A)$ et $E_2(A)$ sont des espaces vectoriels réels.

2. **a.** Établir que $E_1(A) \subset E_2(A)$.

b. Montrer que si A est inversible, alors $E_1(A) = E_2(A)$.

3. Établir que si $A - I$ est inversible, alors $E_1(A) = \{0\}$.

4. Soit $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_1(B)$ et $E_2(B)$.

Partie 2.

On considère les matrices $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Montrer que $F_2 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid CX = 2X\}$ est un espace vectoriel. Déterminer une base de F_2.

6. Montrer que la matrice P est inversible et déterminer son inverse P^{-1}.

7. Calculer la matrice $D = P^{-1}CP$.

8. **a.** Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence

$$M \in E_1(C) \Longleftrightarrow P^{-1}M \in E_1(D).$$

b. Montrer que pour tout $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $N \in E_1(D)$ si et seulement s'il existe trois réels a, b, c tels que $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c. En déduire l'expression générale des matrices de $E_1(C)$ et déterminer une base de $E_1(C)$. Quelle est la dimension de $E_1(C)$?

d. Donner l'expression générale des matrices de $E_2(C)$ et déterminer une base de $E_2(C)$. Quelle est la dimension de $E_2(C)$?
A-t-on $E_1(C) = E_2(C)$?

9. **a.** Démontrer que pour tout entier naturel n, $C^n = PD^nP^{-1}$.

b. En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de C^n en fonction de n.